Koordinator
Konstantin Rusch

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 9

1. Beim Abfüllen von Kartoffeln in 10–kg–Säcke variiert das Einfüllgewicht zwischen 9.750 kg und 10.750 kg. Die Einfüllgewichte sind in diesem Bereich gleichverteilt, Gewichte ausserhalb kommen nicht vor.

a) Wie gross ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass beim Beladen eines Lieferwagens mit 146 Säcken das zulässige Ladegewicht von 1500 kg überschritten wird?

b) Wieviele Säcke darf man höchstens laden, damit das zulässige Ladegewicht nur mit (approximativer) Wahrscheinlichkeit 1% überschritten wird?

Hinweis: Die Gewichte der einzelnen Säcke können als unabhängig voneinander angenommen werden.

2. **a)** Berechne mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Hinweis Verwende folgendes Resultat:

Wenn $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$, und $Y \sim \mathrm{Pois}(\mu)$, $\mu > 0$, und X und Y sind unabhängig, dann ist $X + Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda + \mu)$.

b) Sei $(X_k)_k$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{für } 0 \le x < 2, \\ \frac{1}{3}, & \text{für } 2 \le x \le 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne den (P-f.s.) Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}.$$

3. Der **Median** m einer Verteilung F wurde definiert durch $m = F^{-1}(1/2)$. Seien $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion F, Dichtefunktion f, und Median $m = 0$. Ferner soll $f(0) > 0$ sein. Ferner sei Z_n der sogenannte **Stichprobenmedian** von $X_1, \dots, X_n$, d.h. Z_n ist die mittlere Beobachtung, oder formelmässig $Z_n = X_{(k)}$ mit $k = [\frac{n}{2} + 1]$, wobei $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ die der Grösse nach geordneten Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ bezeichnen und $[x]$ den ganzzahligen Teil von x.

a) Seien $Y_i = 1_{\{X_i \leq x\}}$ und $S_n(x) := \sum_{i=1}^n Y_i$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_n(x)]$ und $\mathrm{Var}[S_n(x)]$.

b) Beschreiben Sie das Ereignis $\{Z_n \leq x\}$ mit Hilfe der Zufallsvariable $S_n(x)$.

c) Geben Sie eine Approximation für $\mathbb{P}(Z_n \leq x)$ als $n \to \infty$ und berechnen Sie die Grenze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/2 - \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n(1-\alpha_n)}/\sqrt{n}},$$

wobei $\alpha_n = F(\frac{x}{\sqrt{n}})$.

4. Eine Zufallsvariable X_ν heisst χ^2-verteilt mit Freiheitsgrad $\nu \in \mathbb{N}$ (geschrieben $X_\nu \sim \chi^2_\nu$), falls

$$X_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} Z_k^2.$$

wobei $(Z_k)_k$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt ist.

a) Zeige, dass

$$E[X_\nu] = \nu \qquad \text{und} \qquad \mathbb{V}[X_\nu] = 2\nu$$

gilt.

b) Gib mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{X_\nu}{\nu} - 1\right| \leq 0.75\right].$$

Berechnen Sie die Schranke für $\nu = 12$.

c) Berechnen Sie für $\nu = 12$ eine Annäherung für die obige Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.